

POISEUILLESCHES STRÖMUNG THIXOTROPER SUBSTANZEN BEI VIBRATION*

O. WEIN, P. MITSCHKA und K. WICHTERLE

*Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik,
Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, 165 02 Prag - Suchbát*

Eingegangen am 17. November 1973

Untersucht wird das mathematische Modell der stationären Strömung thixotroper Substanzen durch ein Rohr kreisförmigen Querschnitts unter gleichzeitigem verflüssigendem Einfluß von Vibrationen. Für das Potenzmodell der Viskositätsfunktion werden der Volumendurchsatz, wie auch weitere Kenngrößen der Rohrströmung in Abhängigkeit von den Dimensionen des Rohrs, dem Druckverlust und von dem den Einfluß der Vibrationen repräsentierenden Dissipationsparameter W_0 angegeben. Untersucht werden ebenfalls die Grenzfälle des überwiegenden Einflusses der Vibrationen ($W_0 \rightarrow \infty$), wenn ein newtonsches Verhalten der ursprünglich thixotropen pseudoplastischen Fluide zu beobachten ist, und des vernachlässigbar kleinen Einflusses der Vibrationen ($W_0 \rightarrow 0$). Es wird aufgezeigt, wie die resultierende Lösung zum Aufsuchen der Abhängigkeit des Dissipationsparameters W_0 von den meßbaren Parametern der Vibrationen durch Auswerten von Experimentaldaten herangezogen werden kann.

Eine der bedeutsamen Kundgebungen der Thixotropie verschiedener halbflüssiger Substanzen, z. B. hochkonzentrierter Suspensionen, ist deren Neigung unter dem Einfluß von Erschütterungen, Vibrationen u. ä. zu verflüssigen. In der vorausgegangenen Arbeit¹ haben wir ein mathematisches Modell des thixotropen Verhaltens vorgeschlagen, das qualitativ gewissen experimentell festgestellten Tatsachen² entspricht. Das Wesen dieses Modells liegt in der Erfassung der momentanen Viskosität in Abhängigkeit von einer einzigen skalaren Größe, der Gesamtdissipation der mechanischen Energie W , die als Summe zweier Posten, der Dissipation der Makroströmung $W_M = 1/2\tau : \mathbf{D}$ und der Dissipation durch hydrodynamisches Rauschen W_N , d. h. wie

$$W = W_M + W_N \quad (1)$$

gegeben ist.

Die Abhängigkeit der Dissipation des hydrodynamischen Rauschens W_N von den die Vibrationen charakterisierenden Parametern muß allerdings auf experimentellem Wege ermittelt werden. Um ein mit der vorgeschlagenen Theorie konsistentes

* II. Mitteilung in der Reihe Strömung thixotroper Substanzen bei Vibration; I. Mitteilung: diese Zeitschrift 38, 2874 (1973).

Auswerten der Experimente zu ermöglichen, muß die Lösung des mathematischen Modells der Strömung in der in Frage kommenden geometrischen Anordnung bekannt sein. In dieser unserer Arbeit wird eine solche Lösung für die voll entwickelte, stationäre (laminare) Makroströmung durch ein Rohr kreisförmigen Querschnitts angeführt, mit einem durch eine konstante Dissipation charakterisierten hydrodynamischen Rauschen:

$$W_N(\mathbf{r}, t) = W_0 = \text{const.} \quad (2)$$

Die vorerst ganz allgemein formulierte Lösung wird im folgenden näher für das Potenzmodell der Viskositätsfunktion erörtert.

MODELL DER STRÖMUNG

Das gemittelte Geschwindigkeitsfeld einer Poiseuilleschen Makroströmung ist in Zylinderkoordinaten durch eine einzige von Null unterschiedliche Komponente des Geschwindigkeitsvektors $v_z = v_z(r)$ charakterisiert. Unterschiedlich von Null ist demnach im Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten \mathbf{D} nur die einzige Komponente

$$D_{zr} = D_{rz} = D = -dv_z/dr, \quad (3)$$

und unter Voraussetzung der Gültigkeit einer konstitutiven Relation vom Typ

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \mathbf{D} \quad (4)$$

im Tensor der Deformationsspannungen $\boldsymbol{\tau}$ dann auch nur eine Komponente

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau = \mathfrak{B}r/R. \quad (5)$$

Die rechte Seite der Gl. (5) ist das Resultat der Integration der in Spannungen formulierten Bewegungsgleichungen, wobei die dynamische Konsistenzveränderliche \mathfrak{B} durch die Beziehung

$$\mathfrak{B} = -(R/2)(dP/dz) + \rho g_z \quad (6)$$

gegeben ist. Das in allgemeiner Form

$$\eta = M\left[W\left(t - \frac{s}{0}\right)\right] \quad (7)$$

eingeführte Materialfunktional kann im Falle einer viskometrischen Makroströmung

mit konstantem Rauschen, wenn für einen gegebenen Materialpunkt $W = \text{const.}$ gilt, in die Form der Materialfunktion

$$\eta = \eta[W] \quad (8)$$

vereinfacht werden¹, wo $W = W_M + W_0$ gilt. Hierbei ist die Konstante W_0 ein Parameter des betrachteten Problems; W_M ist dann definitionsgemäß durch folgende alternative Beziehungen gegeben:

$$W_M = \tau D = \tau^2 / \eta = \eta D^2. \quad (9)$$

Bereits in der vorausgegangenen Arbeit¹ konnte nachgewiesen werden, daß die Materialfunktion (8) für $W_0 = 0$ der aus der Theorie der viskometrischen Strömungen bekannten Viskositätsfunktion äquivalent ist. Für die weitere Analyse ist es von Vorteil, wenn diese Viskositätsfunktion in der Form

$$\eta = \eta_\tau[\tau] \quad (10)$$

vorliegt. Die Form der Materialfunktion (8) kann auf Grund der für $W_0 = 0$ geltenden Definitionsbeziehungen $\eta = \tau/D$, $W = \tau D$ auch als Transformation der Funktion (10) gemäß der implizierten Gleichung

$$\eta - \eta_\tau[(W \cdot \eta)^{1/2}] = 0 \quad (11)$$

ausgedrückt werden¹. Aber auch im Falle von $W_0 \neq 0$, wenn gemäß (1) und (9)

$$(W \cdot \eta)^{1/2} = (\tau^2 + W_0 \eta)^{1/2} \quad (12)$$

gilt, muß die Materialfunktion $\eta(W)$ die gleiche Form aufweisen, so daß die Abhängigkeit $\eta(\tau, W_0)$ für einen bekannten Verlauf von $\eta_\tau[\tau]$ wiederum mit Hilfe der Gl. (11) bestimmt werden kann, wobei die Größe W allgemein durch die Relation (12) ausgedrückt ist.

Das Geschwindigkeitsprofil $v_z(r)$ einer durch Vibrationen beeinflussten Poiseuille'schen Strömung thixotroper Substanzen ergibt sich demnach aus der Integration der Gleichungen

$$-(dv_z/dr) = \tau/\eta; \quad v_z(R) = 0. \quad (13), (14)$$

Die Abhängigkeit von τ und $\eta = \eta(\tau, W_0)$ von der Radialkoordinate r ist durch die Gleichungen (5) und (12) gegeben.

Das Ergebnis einer formalen Integration von (13) ist

$$v_z(r) = (R/\mathfrak{P}) \int_{\tau(r)}^{\mathfrak{P}} (\tau/\eta) d\tau. \quad (15)$$

Bei experimentellen Untersuchungen der Rohrströmung kann aber der Volumendurchsatz Q viel einfacher als das Geschwindigkeitsprofil gemessen werden; für eine bekannte Geschwindigkeitsverteilung ist bekanntlich

$$Q = \int_0^R v_z(r) 2\pi r dr. \quad (16)$$

Unter Benutzung von (5), (13) und (14) resultiert dann aus (16) die Abhängigkeit zwischen der dynamischen und der kinematischen Konsistenzveränderlichen \mathfrak{P} und \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F} \equiv 4Q/\pi R^3 = (4/R^3) \int_0^R (-dv_z/dr) r^2 dr = (4/\mathfrak{P}^3) \int_0^{\mathfrak{P}} (\tau^3/\eta) d\tau. \quad (17)$$

Von Interesse für weitere Überlegungen sind sodann noch diese Kenngrößen: die maximale Geschwindigkeit der Strömung U_{\max} , gegeben durch die Beziehung

$$U_{\max} = (R/\mathfrak{P}) \int_0^{\mathfrak{P}} (\tau/\eta) d\tau, \quad (18)$$

der Wert der Viskosität in der Rohrachse, η_0 , gegeben als Lösung der Gleichung

$$\eta_0 - \eta_\tau[(W_0\eta_0)^{1/2}] = 0, \quad (19)$$

der Wert der Viskosität an der Rohrwand, gegeben als Lösung einer analogen Gleichung

$$\eta_w - \eta_\tau[(W_0\eta_w + \mathfrak{P}^2)^{1/2}] = 0, \quad (20)$$

der Wert der Schergeschwindigkeit an der Rohrwand

$$D_w = \mathfrak{P}/\eta_w, \quad (21)$$

wie auch der Wert der Gesamtdissipation an der Rohrwand

$$W_w = W_0 + \mathfrak{P}^2/\eta_w. \quad (22)$$

ALLGEMEINE LÖSUNG

Die gesuchten Größen η_0 , η_w , D_w und W_w sind durch die algebraischen Gleichungen (19)–(22) definiert; zwecks Bestimmung von U_{\max} und \mathfrak{F} ist es für einen bekannten Verlauf der Viskositätsfunktion $\eta_\tau[\tau]$ nötig die Linienintegrale (17), (18) entlang der durch die Gleichung (12) definierten Kurve für $W_0 = \text{const.}$ zu lösen. Durch Einführung geeigneter Substitutionen kann die Lösung dieser Linienintegrale durch Quadraturen ausgedrückt werden: mit Hilfe z. B. der Substitution

$$T \equiv (\tau^2 + W_0\eta)^{1/2}, \quad (23a)$$

die offensichtlich der Relation

$$\eta(\tau, W_0) = \eta_\tau[T] \quad (23b)$$

genügt, können die Integrale (17), (18) in Quadraturen folgender Form reduziert werden:

$$U_{\max} = (R/\mathfrak{P}) \int_{T_0}^{T_w} \frac{(T - W_0/2 \cdot \eta'_\tau[T])}{\eta_\tau[T]} dT, \quad (24)$$

$$\mathfrak{F} = (4/\mathfrak{P}^3) \int_{T_0}^{T_w} \frac{(T^2 - W_0\eta_\tau[T]) \cdot (T - W_0/2 \cdot \eta'_\tau[T])}{\eta_\tau[T]} dT, \quad (25)$$

mit $\eta'_\tau \equiv d\eta/dT$.

Die Parameter T_0 , T_w sind Integrationsgrenzen der Quadraturen (24), (25), die als Wurzeln der algebraischen Gleichungen

$$T_0^2 - W_0\eta_\tau[T_0] = 0, \quad T_w^2 - W_0\eta_\tau[T_w] = \mathfrak{P}^2 \quad (26), (27)$$

bestimmt werden müssen.

In gewissen Fällen ist es mit Rücksicht auf die Form von $\eta_\tau[\tau]$ für konkrete Berechnungen vorteilhafter die Quadraturen (24), (25) in die Form

$$(\mathfrak{P}U_{\max})/R = \int_{T_0}^{T_w} \frac{T dT}{\eta_\tau[T]} - \frac{W_0}{2} \ln \frac{\eta_\tau[T_w]}{\eta_\tau[T_0]}, \quad (28)$$

$$(\mathfrak{P}^3\mathfrak{F})/4 = \int_{T_0}^{T_w} \frac{T^3 dT}{\eta_\tau[T]} - \frac{W_0}{2} \int_{T_0}^{T_w} \frac{T^2 \eta'_\tau[T]}{\eta_\tau[T]} dT - W_0\mathfrak{P}^3/2 \quad (29)$$

umzugestalten.

Potenzmodell

Während bei allen übrigen Modellen der Viskositätsfunktion in der Lösung zwei unabhängige Parameter \mathfrak{P} und W_0 auftreten, die bei der dimensionslosen Formulierung lediglich durch die dimensionsbehafteten Parameter τ_1, D_1 des in Frage kommenden Modells³ normalisiert werden, kann das untersuchte Problem bei Anwendung des durch die Parameter $m = 1/n$ und K charakterisierten Potenzmodells

$$\eta_r[T] \equiv K^m T^{1-m}, \quad (30)$$

derart normalisiert werden, daß es für einen gegebenen Verlauf der Viskositätsfunktion (d. h. für einen vorgegebenen Fließindex) nur einen einzigen unabhängigen, veränderlichen, dimensionslosen Parameter S (siehe weiteren Text) enthält. Infolge dieser Eigentümlichkeit³ ist dem Potenzmodell erhöhte Aufmerksamkeit zu widmen. Im weiteren wollen wir deshalb eingehender die Konkretisierung der allgemeinen Lösung, Gl. (24) bis (27), für den durch die Beziehung (30) definierten Verlauf einer Viskositätsfunktion erörtern.

Durch Einsetzen von (30) in (26) resultiert ein expliziter Ausdruck für T_0

$$T_0 = (W_0 K^m)^{1/(1+m)}; \quad (31)$$

T_w ist dann die Lösung der Gleichung

$$T_w^2 - W_0 K^m T_w^{1-m} = \mathfrak{P}^2. \quad (32)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Parameter

$$\Theta \equiv T/\mathfrak{P}, \quad \mathcal{P} \equiv \tau/\mathfrak{P}, \quad S \equiv T_0/\mathfrak{P}, \quad X \equiv T_w/\mathfrak{P} \quad (33)$$

kann die dimensionslose Viskositätsfunktion des Potenzmodells (30) mit Ausnutzung der Beziehungen (23a) und (31) vorerst in die Form

$$\mathcal{P}^2 = \Theta^2 \{1 - (S/\Theta)^{m+1}\}, \quad (34)$$

umgestaltet werden, die dann für $\mathcal{P} = 1$, d. h. für $\Theta = X$ gemäß (32) auch wie

$$S^{1+m} = X^{1+m}(1 - X^{-2}) \quad (35)$$

geschrieben werden kann.

Die gesuchten Größen U_{\max} und \mathfrak{F} können nun z. B. in der Weise normalisiert werden, daß ihre dimensionslosen Äquivalente ψ_U und ψ_F angeben, wievielmals für

ein gegebenes W_0 die Werte von U_{\max} und von \mathfrak{F} größer sind als im Falle $W_0 = 0$. Solche dimensionslosen Größen sind durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\begin{aligned} \{(3+m)/4\} \{\mathfrak{F}/(\mathfrak{P}/K)^m\} &\equiv \psi_F = (3+m) \int_0^1 \Theta^{m-1} \vartheta^3 d\vartheta = \\ &= (3+m) \int_S^X \Theta^{m-1} \vartheta^2 \{d(\vartheta^2/2)/d\Theta\} d\Theta, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} (1+m) U_{\max}/\{R(\mathfrak{P}/K)^m\} &\equiv \psi_U = (1+m) \int_0^1 \Theta^{m-1} \vartheta^2 d\vartheta = \\ &= (1+m) \int_S^X \Theta^{m-1} \{d(\vartheta^2/2)/d\Theta\} d\Theta. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Relationen $\vartheta = \vartheta(\Theta)$ und $X = X(S)$ sind hierbei durch die Beziehungen (34) und (35) gegeben.

Die Ergebnisse der Integration der Gl. (36) und (37) sind gemeinsam mit den entsprechenden asymptotischen Entwicklungen für $S \rightarrow 0$ und für $S \rightarrow \infty$ in der Tabelle I zusammengestellt. Einige weitere Parameter des zu lösenden Problems

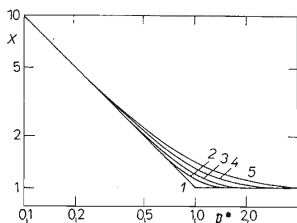


ABB. 1

Abhängigkeit $X \equiv T_w/\mathfrak{P}^*$ von \mathfrak{P}^*
 $1 n = 0, 2 \ 0.1, 3 \ 0.2, 4 \ 0.5, 5 \ 0.9.$

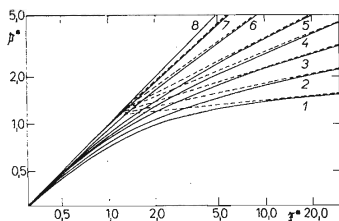


ABB. 2

Abhängigkeit des dimensionslosen Druckverlustes \mathfrak{P}^* vom dimensionslosen Durchsatz \mathfrak{F}^*

$1 n = 0.1, 2 \ 0.2, 3 \ 0.3, 4 \ 0.4, 5 \ 0.5, 6 \ 0.7, 7 \ 0.9, 8 \ 1.0.$ Durch gestrichelte Geraden sind die Resultate der entsprechenden asymptotischen Lösungen für $\mathfrak{F}^* \rightarrow \infty$ eingezeichnet. Die asymptotische Lösung für $\mathfrak{F}^* \rightarrow 0$ weist die Form $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{F}^*$ auf.

TABELLE I
Algebraische Lösungen für das Potenzmodell $m = 1/n$

$X(S, m)$	$\psi_F(S, m)$	$\psi_U(S, m)$
Allgemeine Lösung $(S/X)^{1+m} + X^{-2} - 1 = 0$	$S^{m+1} \left((X^2 - S^2) \left(\frac{m+1}{2} \right)^2 + \frac{1}{X^2 - 1} - \frac{m+1}{2} \right)$	$X^{m-1} \left(1 - \frac{m-1}{2} (X^2 - 1) \ln(1 - X^{-2}) \right)$
Entwicklung für $S \rightarrow 0$ $1 + \frac{1}{2} S^{m+1} + \dots$	$1 + \frac{(m+3)(m-1)}{4} S^{m+1} + \dots$	$\left(1 + \frac{m+1}{2} S^{m+1} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2} S^{m+1} \ln S^{m+1} \right)$
Entwicklung für $S \rightarrow \infty$ $S \left(1 + \frac{1}{1+m} S^{-2} + \dots \right)$	$\frac{3+m}{4} S^{m-1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{m-1}{m+1} S^{-2} + \dots \right)$	$\frac{1+m}{2} S^{m-1} \left(1 + \frac{m-1}{m+1} S^{-2} + \dots \right)$

TABELLE II
Asymptotische Lösungen für das Potenzmodell

W_0	Kriterium	Pseudorheogramm	Maximalgeschwindigkeit
$W_0 \rightarrow 0$	$\mathfrak{P}^* > 10^{1/(m+1)}$	$\mathfrak{P}^* = \{(3+m)/4 \cdot \mathfrak{F}^*\}^{1/m}$	$U^* = (3+m)/(1+m)$
$W_0 \rightarrow \infty$	$\mathfrak{P}^* < \{(1+m)/20\}^{1/2}$	$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{F}^*$	$U^* = 2$

können für bekanntes S , m und X dann schon leicht nachgerechnet werden. So resultieren z. B. für die Viskositäten η_0 und η_w die Beziehungen

$$\eta_0 = K^m T_0^{1-m} = K^{2m/(1+m)} W_0^{(1-m)/(1+m)}, \quad (38)$$

$$\eta_w = K^m T_w^{1-m} = K^m (\mathfrak{P}X)^{1-m}. \quad (39)$$

Ähnlich wie auch bei der Kapillarrheometrie ist es von Vorteil, die Resultate der Strömungsexperimente als Abhängigkeiten zwischen \mathfrak{P} und \mathfrak{F} unter den gegebenen Bedingungen ($K = \text{const}$, $W_0 = \text{const}$) anzugeben. Diesem Ziel dient auch die Umformung der im vorstehenden angeführten Resultate der Lösung des mathematischen Modells, u. zw. durch Einführung folgender neuer dimensionsloser Äquivalente für \mathfrak{P} , \mathfrak{F}

$$\mathfrak{P}^* \equiv \mathfrak{P} / (W_0 K^m)^{1/(m+1)} = 1/S, \quad (40)$$

$$\mathfrak{F}^* \equiv \mathfrak{F} (K/W_0)^{m/(m+1)} = \{4/(3+m)\} S^{-m} \psi_F, \quad (41)$$

die lediglich mit den konstanten Parametern K und W_0 normalisiert wurden. Die dimensionslose Geschwindigkeit U^* wird dann in folgender Form eingeführt:

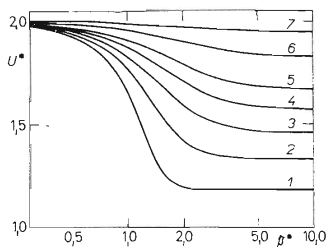


ABB. 3

Abhängigkeit der dimensionlosen Geschwindigkeit U^* vom dimensionlosen Druckverlust \mathfrak{P}^*

1 $n = 0.1$, 2 0.2, 3 0.3, 4 0.4, 5 0.5, 6 0.7, 7 0.9.

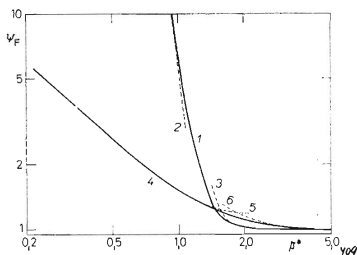


ABB. 4

Vergleich der asymptotischen und der exakten Lösungen für $\psi_F(\mathfrak{P}^*)$

1 Exakte Lösung für $n = 0.1$, 2 und 3 asymptotische Lösungen für $\mathfrak{P}^* \rightarrow 0$ und $\mathfrak{P}^* \rightarrow \infty$, 4 exakte Lösung für $n = 0.5$, 5 und 6 asymptotische Lösungen für $\mathfrak{P}^* \rightarrow 0$ und $\mathfrak{P}^* \rightarrow \infty$.

$$U^* \equiv \frac{U_{\max}}{U} = \{(3 + m)/(1 + m)\} (\psi_U/\psi_F), \quad (42)$$

Den Verlauf von X , \mathfrak{F}^* und U^* in Abhängigkeit von \mathfrak{P}^* und η zeigen die Abb. 1–3.

DISKUSSION

Um das diskutierte rheologische Modell für die Vorhersage des Einflusses von Vibrationen u. ä. in konkreten Situationen anwendbar zu machen, muß die Abhängigkeit von W_0 von den meßbaren Parametern der Mikrobewegungen, z. B. von der Amplitude und der Frequenz der Vibrationen der Wände, zwischen denen die untersuchte Substanz strömt, bekannt sein. Die vorgelegte Lösung für die Poiseuillesche Strömung wurde mit dem Ziel des Auswertens des Parameters W_0 aus experimentellen Abhängigkeiten $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ konstruiert, u. zw. für Flüssigkeiten, deren Verhalten (im gegebenen η -Bereich) für $W_0 \rightarrow 0$ mit dem Potenzmodell wiedergegeben werden kann, d. h. für Flüssigkeiten mit bekanntem K und n . Ein Beispiel des Auswertens derartiger Daten ist im Anhang enthalten.

Die asymptotischen Lösungen stehen im Einklang mit den qualitativen Ausgangsvorstellungen, gemäß denen die strömende Suspension bei $W_0 \rightarrow \infty$ immer als ein newtonsches Fluid angesehen werden kann, wohingegen bei $W_0 \rightarrow 0$ der Einfluß der Vibrationen auf das Fließverhalten der Suspension vernachlässigbar wird. Die Formen der entsprechenden asymptotischen Ergebnisse sind aus der Tabelle II ersichtlich, wo auch die Kriterien der Vernachlässigbarkeit oder des überwiegenden Einflusses der Vibrationen zusammengefaßt sind. In der Spalte „Kriterium“ sind Bedingungen angeführt, bei denen sich die asymptotischen Lösungen von den exakten Resultaten nicht um mehr als um 5% unterscheiden. Für $W_0 \rightarrow 0$ geht die Lösung identisch in die bekannten, für die Rohrströmung von Potenzflüssigkeiten geltenden Beziehungen⁴ über. Die Abb. 4 soll dann die Güte der Anpassung der asymptotischen Ausdrücke zur exakten Lösung dokumentieren.

ANHANG

Anwendung des mathematischen Modells zum Auswerten des Parameters W_0 . Mit Recht darf angenommen werden, daß Ziel des Auswertens von Daten die Bestimmung des Parameters W_0 sein wird, und dies durch Gegenüberstellung des mathematischen Modells mit experimentellen Angaben betreffend die Abhängigkeiten $\Delta P = f(Q)$, bzw. von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ unter vorgegebenen Vibrationsbedingungen. Ein derartiges Problem kann sicher mit numerischen Methoden der nichtlinearen Regressionsrechnung gelöst werden. Bei heuristischen Experimenten wird jedoch ein graphisches Auswerten bevorzugt, das bessere Bedingungen für die Unterscheidung zwischen systematischen und zufälligen Abweichungen, für die Abschätzung der Empfindlichkeit des Ergebnisses zu den einzelnen Einflußgrößen usw. gewährt.

Gehen wir von der Annahme aus, daß die Daten (s. Abb. 5) durch zwei Kurven *A* und *B* in den Koordinaten $\log \Psi - \log \xi$ wiedergegeben werden können, die auf dem Schiebeblatt eines Nomogramms eingezeichnet sind, dessen Grundblatt die in der Abb. 2 veranschaulichten Abhängigkeiten $\xi^* = \xi^*(\Psi^*, n)$ trägt, die das angewendete matematische Modell repräsentieren.

Das Schiebeblatt (Abb. 5) verschieben wir nun planparallel auf dem Grundblatt des Nomogramms (Abb. 2) so lange, bis sich die Kurve *A* mit einer der asymptotischen Lösungen für $\xi^* \rightarrow \infty$ und die Kurve *B* mit der entsprechenden exakten Lösung decken wird. Auf dem Schiebeblatt zeichnen wir sodann den Punkt C_0 mit den Koordinaten (Ψ_0, ξ_0) ein, der dem Schnittpunkt der asymptotischen Lösungen für $\xi^* \rightarrow \infty$ und für $\xi^* \rightarrow 0$ entspricht. Falls die Abhängigkeit $\Psi = \Psi(\xi)$ über ein so breites Intervall vermessen wurde, daß beide asymptotischen Äste deutlich ersichtlich sind, dann kann die Lage des Punktes C_0 auf dem Schiebeblatt direkt durch eine graphische Konstruktion, ohne Heranziehung des Grundblattes, ermittelt werden.

Schreiben wir die in der Tabelle II enthaltenen asymptotischen Beziehungen in dimensionsbehaftete Beziehungen um, dann stellen wir leicht fest, daß die Koordinaten (Ψ_0, ξ_0) des Punktes C_0 , der ihrem Schnittpunkt entspricht, simultan den Beziehungen

$$\Psi_0(W_0 K^m)^{1/(m+1)} = \{(3 + m)/4 \cdot \xi_0(K/W_0)^{m/(m+1)}\}^{1/m}$$

und

$$\Psi_0(W_0 K^m)^{1/(m+1)} = \xi_0(K/W_0)^{m/(m+1)}$$

genügen müssen und daß der Wert des Parameters W_0 somit aus der Beziehung

$$W_0 = \Psi_0 \xi_0 y(n)$$

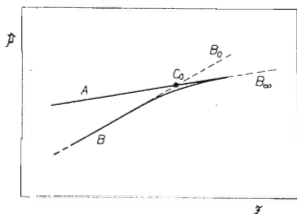


ABB. 5

Graphische Auswertung des Parameters W_0

A Pseudorheogramm $\Psi(\xi)$ ohne Einfluß von Vibrationen; *B* Pseudorheogramm $\Psi(\xi)$ bei Vibration; B_0, B_∞ asymptotische Verläufe des Pseudorheogramms unter Vibration; C_0 Schnittpunkt der Geraden B_0 und B_∞ .

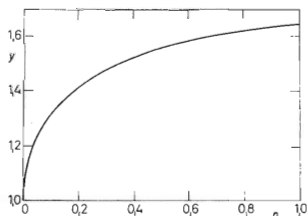


ABB. 6

Verlauf der Funktion $y(n)$

berechnet werden kann, wobei die Werte von $y(n) = \{(3n + 1)/4\}^{2n/(1-n)}$ aus der Abb. 6 abgelesen werden können.

Es kann aufgezeigt werden⁵, daß diese Methode die Bestimmung von W_0 auch in den Fällen ermöglicht, wenn die in Frage kommende Viskositätsfunktion, bzw. die Abhängigkeit $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$, bei $W_0 = 0$, nicht die Form des Potenzmodells (30) aufweist.

Zu Dank sind die Autoren dem vor kurzem verstorbenen Direktor Prof. V. Bažant für Interesse und Unterstützung bei ihren Untersuchungen der angewandten Hydromechanik konzentrierter Suspensionen verpflichtet, von denen einige Resultate in dieser Arbeit vorgelegt werden.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

D	tensorielle Deformationsgeschwindigkeit
D	skalare Deformationsgeschwindigkeit
D_w	Deformationsgeschwindigkeit an der Wand
g_z	Schwerebeschleunigung
K	Konsistenzkoeffizient des Potenzmodells
M	Materialfunktional
n	dimensionsloser Fließindex des Potenzmodells
P	Druck
Q	Volumendurchfluß
r	Radialkoordinate
R	Halbmesser des Rohrs
s, t	Zeitveränderliche
S	Parameter, Gl. (33)
T	Parameter, Gl. (23a)
T_0	Wert von T in der Rohrachse, Gl. (26), (31)
T_w	Wert von T in der Rohrwand, Gl. (27), (32)
U_{\max}	maximale Geschwindigkeit in der Rohrachse
\bar{U}	mittlere Geschwindigkeit
U^*	dimensionslose Maximalgeschwindigkeit, Gl. (42)
v_z	axiale Geschwindigkeitskomponente
W	Intensität der Gesamtdissipation der mechanischen Energie
W_M	Dissipation der Makroströmung, Gl. (9)
W_0	konstante Dissipation durch hydrodynamisches Rauschen
W_w	Gesamtdissipation an der Rohrwand
X	Parameter, Gl. (33)
z	Axialkoordinate
η	scheinbare Viskosität, Viskositätsfunktion
η_0	Viskosität in der Rohrachse, Gl. (19)
η_w	Viskosität an der Rohrwand, Gl. (20)
η_τ	Viskositätsfunktion mit τ als Argument
ϑ	Parameter, Gl. (33)
Θ	Parameter, Gl. (33)
ψ_F	Parameter, Gl. (36)
ψ_U	Parameter, Gl. (37)
ϱ	Dichte der Substanz
τ	Spannungstensor
\mathfrak{P}	dynamische Konsistenzveränderliche, Gl. (6)

- ℘* dimensionslose Konsistenzveränderliche, Gl. (40)
℘ kinematische Konsistenzveränderliche, Gl. (17)
℘* dimensionslose Konsistenzveränderliche, Gl. (41)

Materialfunktionen oder Materialfunktionale sind durch eckige Klammer gekennzeichnet.

LITERATUR

1. Wein O., Wichterle K., Mitschka P.: diese Zeitschrift 38, 2874 (1973).
2. Wein O.: Chem. průmysl 22, 429 (1972); Ind. Chem. Eng. 13, 126 (1973).
3. Wein O., Mitschka P., Ulbrecht J.: diese Zeitschrift 37, 1106 (1972).
4. Ulbrecht J., Mitschka P.: *Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1967.
5. Wein O.: Unveröffentlichte Ergebnisse.

Übersetzt vom Autor (P. M.)